log (로그) 의 정의와 성질

● 개념정리

1. 로그의 정의

(1) $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ 일 때, $a^x=b$ 를 만족하는 실수 x를 $x=\log_a b$ 로 나타내고 x를 a를 밑으로 하는 b의 로그, b를 $\log_a b$ 의 진수라 한다. 즉,

$$a^x=b \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a b$$

(2) $\log_a x$ 가 정의되려면 밑의 조건은 $a>0$, $a\neq1$ 이고, 진수의 조건은 $x>0$ 이다.

2. 로그의 성질

$a\neq1$, $a>0$, $x>0$, $y>0$이고 m이 실수일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^n=n\log_a x$

(5) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c\neq1$, $c>0$)

(6) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

(7) $a^{\log_a x}=x$, $a^{\log_b x}=x^{\log_b a}$

3.로그공식의 변형

a, b, c가 1이 아닌 양수일 때

(1) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ (2) $\log_a b\cdot\log_b a=1$ (3) $\log_{a^m}a^n=\frac{n}{m}$ (단, $m\neq0$)

(4) $\log_a b=\log_{a^2}b^2=\log_{a^3}b^3=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}=\cdots=\log_{a^n}b^n$ (단, $n\neq0$)

[증명]

(1) $a^0=1$이므로 $\log_a 1=0$, $a^1=a$이므로 $\log_a a=1$

(2) $\log_a x=m$, $\log_a y=n$으로 놓으면

$x=a^m$, $y=a^n$

$\therefore xy=a^m a^n=a^{m+n}$

로그의 정의에 의하여

$\log_a xy=m+n=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a x=m$, $\log_a y=n$으로 놓으면

$x=a^m$, $y=a^n$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$\therefore \log_a \frac{x}{y}=m-n=\log_a x-\log_a y$

17세기에 접어들면서 철학, 천문학, 물리학 등의 발전과 더불어 근대 그리고 현대로 이어지는 이른바 과학혁명의 시대에 돌입하게 된다. 망원경이 발명되어 천문학, 항해술, 삼각법 등이 급속히 발달하였다. 이에 따라 계산해야 할 수도 점점 복잡해져서 고도의 계산 능력을 요구하게 되었다. 17세기에 당시에는 계산기가 발명되기 이전이었으므로 천문학적 수의 계산은 학자들에게 큰 고역이었고 계산 결과를 얻기 위해서는 엄청난 노력을 해야만 했다. 이러한 계산을 좀더 간단히 하기 위해서는 새로운 계산 기술이 나와야만 하였고, 이것이 바로 로그 발견의 배경이다.
로그의 이론은 스코틀랜드의 수학자 네이피어(1550-1617)에 의해서 본격적으로 연구되었고 로그와 진수라는 낱말은 네이피어가 만들어낸 용어이다. 그러나 실제로 계산에 이용할 수있는 상용로그표는 네이피어의 친구 브리그스(1561-1631)에 의해서 만들어진다.

(4) $\log_a x = k$로 놓으면 $a^k = x$ $\therefore a^{nk} = x^n$ 로그의 정의에 의하여 $\log_a x^n = nk$

$\therefore \log_a x^n = n\log_a x$

(5) $\log_a b = m$으로 놓으면 $a^m = b$ 양변에 밑을 c로 하는 로그를 취하면 $\log_c a^m = \log_c b$ $m\log_c a = \log_c b$ $\therefore m = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\therefore \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(6) $a^m = b$에서 양변에 밑을 b로 하는 로그를 취하면 $\log_b a^m = \log_b b$, $m\log_b a = 1$

$\therefore m = \dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b$

(7) ⅰ) $a^m = x$에서 $m = \log_a x$이므로 $a^{\log_a x} = x$

ⅱ) $\log_b (a^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_b x = \log_b (x^{\log_b a})$

$\therefore a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

지수와 로그의 변환

1. 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $3^3 = 27$ (2) $5^0 = 1$

(3) $2^{-4} = \frac{1}{16}$ (4) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

2. 다음 등식을 $a^x = b$의 꼴로 나타내어라.

(1) $\log_2 8 = 3$ (2) $\log_5 5 = 1$

(3) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ (4) $\log_{\frac{1}{10}} 1000 = -3$

3. $\log_a 27 = -2$, $\log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일 때, $(ab)^2$ 의 값을 구하시오.

4. $\log_{16} x = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 x의 값을 구하시오.

5. $x = \log_3 \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ 일 때, $3^x - 3^{-x}$의 값을 구하시오.

6. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $2^{-3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \log_2 \frac{1}{8}$

ㄴ. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Leftrightarrow (-2)^{-2} = 4$

ㄷ. $\log_{64} 2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 64^{\frac{1}{6}} = 2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

로그의 정의

7. $\log_{(x-3)}\left(-x^2+5x-4\right)$ 가 정의되도록 하는 x 의 값의 범위를 구하시오.

8. $\log_4\left\{x^2-(a-1)x+4\right\}$ 의 값이 존재하기 위한 a 의 값의 범위를 구하시오.

9. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{(a-2)^2}(ax^2+ax+2)$ 가 정의되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

로그의 기본공식

10. 다음은 로그의 성질을 증명한 것이다.

< 증 명 >

$\log_a M=m$, $\log_a N=n$ 이라 하면

$a^m=\boxed{\text{(가)}}$, $a^n=\boxed{\text{(나)}}$

$\therefore \boxed{\text{(다)}}=a^{m+n}$

로그의 정의에 의하여

$\log_a \boxed{\text{(다)}}=m+n$

즉, $\log_a \boxed{\text{(다)}}=\log_a \boxed{\text{(가)}}+\log_a \boxed{\text{(나)}}$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① $M,\ N,\ MN$ ② $M,\ N,\ M+N$
③ $N,\ M,\ MN$ ④ $N,\ M,\ M+N$
⑤ $M,\ N,\ M^N$

11. $\log_6 3+\log_6 12$ 의 값을 구하시오.

12. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\log_2 16$$

13. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{6}$$

14. $\log_2 12 - \log_2 9 + 2\log_2 \sqrt{6}$ 의 값을 구하시오.

15. $x = 2\log_3 \frac{2\sqrt{2}}{3} + \log_3 \sqrt{162} - \frac{1}{2} \log_3 32$ 일 때, 3^x 의 값은?

16. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ 의 값을 구하시오.

17. $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}$ 의 값을 구하시오.

18. 이차방정식 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 두 근을 $\log_2 a$, $\log_2 b$ 라 할 때, $\log_2 ab$ 의 값을구하시오.

19. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\log_{10}(1 - \frac{1}{2}) + \log_{10}(1 - \frac{1}{3}) + \log_{10}(1 - \frac{1}{4}) + \cdots + \log_{10}(1 - \frac{1}{100})$$

20. $\log_3 \tan 5^o + \log_3 \tan 10^o + \log_3 \tan 15^o + \cdots + \log_3 \tan 85^o$ 의 값을 구하시오.

로그의 밑수 변환공식

21. 다음은 양수 a, x에 대하여

$\log_a x^n = n\log_a x\,(a \neq 1,\ n$은 실수$)$

가 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>
$\log_a x = r$로 놓으면 $x = a^r$이므로
$x^n = \boxed{(가)}$
따라서 $\log_a x^n = \boxed{(나)}$ 이므로
$\log_a x^n = n\log_a x$

위의 과정에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

①a^r, nr ②a^r, r ③a^{nr}, nr

④a^{nr}, $\frac{r}{n}$ ⑤$a^{\frac{r}{n}}$, $\frac{r}{n}$

22. 1이 아닌 양수 a, b에 대하여 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$이 성립함을 증명하는 과정이다.

증명
$\log_a b = x$로 놓으면 $b = [\ ㈎\ ]$
양변에 b를 밑으로 하는 로그를 취하면
$[\ ㈏\ ] = \log_b [\ ㈎\ ]$
$\therefore\ x = \dfrac{[\ ㈏\ ]}{\log_b a}$ $\quad \therefore \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① a^x, 1 ② a^x, a ③ a^x, b

④ b^x, 1 ⑤ b^x, a

23. $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$ 의 값을 구하시오.

24. $8^{\log_2 3} - 100^{\log_{10} 5}$ 의 값을 구하시오.

25. a, x, y 가 양의 실수이고 $A = \log_{a^2} \dfrac{x}{y^2}$, $B = \log_{\sqrt{a}} \dfrac{y}{x^2}$ 일 때, $2A + \dfrac{1}{2}B$ 와 같은 것은? (단, $a \neq 1$)

① $\log_a \dfrac{1}{x^2}$ ② $\log_a \dfrac{1}{y^2}$ ③ $\log_a \dfrac{1}{xy}$

④ $\log_a \dfrac{x^2}{y^7}$ ⑤ $\log_a \dfrac{x^7}{y^2}$

26. $9^{2\log_3 5 - 3\log_{\frac{1}{3}} 4 - 2\log_3 20}$ 의 값을 구하시오.

27. 1 보다 큰 세 실수 a,b,c에 대하여 $\log_a c : \log_b c = 2 : 1$일 때, $\log_a b + \log_b a$의 값을 구하시오.

28. $(\log_{10} 5)^2 + \dfrac{\log_{10} 5 + 1}{1 + \log_2 5}$ 의 값을 구하시오.

로그의 활용

29. $2^a=3, 3^b=5$이고 $15^x=90$일 때, x를 a,b로 나타내시오.

30. $a=2^m$, $b=2^n$ 일 때, $a^{\log_2 b}$ 을 m, n 에 관한 식으로 나타내시오.

31. $\log_2 15=a$, $\log_2 \frac{9}{5}=b$일 때, $\log_2 75$를 a, b로 나타내시오.

32. $\log_{10} 2=a$, $\log_{10} 3=b$ 일 때, $\log_{10} 1.08$ 을 a, b 에 관한 식으로 나타내시오.

33. $\log_3(\log_2 x)=1$, $\log_5(\log_2 y)=-1$일 때, $\log_{xy}\frac{x}{y}$ 의 값을 구하시오.

34. $12^x=8$, $24^y=16$ 일 때, $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}$ 의 값을 구하시오. .

35. 이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_b a+\log_a b$의 값을 구하시오.

36. 방정식 $2^{|x-1|}=9$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

로그의 대소비교

37. 세 수 $A=\frac{3}{2}$, $B=\log_2 3$, $C=(\sqrt{3})^{\log_3 2}$ 의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오.

38. 세 수 $A=3^{\log_3 9-\log_3 3}$, $B=\log_3 5+\log_3 4$, $C=\log_4 2+\log_3 3$를 작은 것부터 차례로 쓰시오.

39. $1<a<b<a^2$에서 $A=\log_b a$, $B=\log_b \frac{a}{b}$, $C=\log_b \frac{b}{a}$일 때, A, B, C의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오.