개정판

대학수학

강은주 · 박봉구 지음

차례

제 1 장
집합과 명제

1.1 집합의 개념

1.2 집합의 연산

1.3 명제와 진리값

대상을 수학적으로 이해하고 표현하는데에 필요한 기본 개념인 집합과 명제를 살펴보자. 집합의 개념은 우리가 취급하는 대상이 무엇인지를 명확히 하기 위해 필요하며, 명제는 올바른 논리를 전개하기 위한 기본 도구라 할 수 있다.

1.1 집합의 개념

집합과 집합의 원소

집합(Set)은 명확하게 판별가능한 것들의 모임을 의미한다. 집합에 속하는 개개의 것을 집합의 원 또는 원소(element)라 한다.

집합은 보통 대문자 A, B, S 등으로 표시하며 집합의 원소는 소문자 a, b, c 등으로 표시한다. a가 A의 원소인 경우에 $a \in A$로 표시하고, a는 A의 원이다 또는 a는 A에 속한다고 한다. b가 A의 원소가 아닌 경우에는 $b \notin A$로 표시한다.

예제 1 다음 모임은 집합이다.

(1) 호남대학교 재학생 중에서 성이 강씨인 학생 전체의 모임

(2) 대한민국의 광역시의 모임

(3) 3보다 크고 20보다 작은 자연수의 모임

예제 2 다음 모임은 집합이 아니다.

(1) 호남대학교 재학생 중에서 키가 큰 학생 전체의 모임

(2) 월수입이 200만원 정도인 직장인의 모임

(3) 나와 성격이 잘 맞는 사람의 모임

보통 우리가 고려하는 집합은 어떤 방정식의 해로 이루어진 집합일 경우가 많다. 방정식의 해로 이루어진 집합을 해집합(solution set)이라 한다.

예제 3 이차방정식 $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$의 해는 $x = 3$ 또는 $x = -1$이므로 $f(x)$의 해집합은 $A = \{3, -1\}$이다.

집합의 표시 방법

원소나열법 : 집합에 속하는 원소를 알아볼 수 있도록 하나씩 다 나열하는 방법이다.

조건제시법 : 집합에 속하는 원소 x의 조건 $p(x)$을 제시하여 집합을 묘사하는 방법이다.

예제 4 3보다 크고 10보다 작은 자연수의 집합 A를 원소나열법으로 $A=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$와 같이 쓸 수 있다. 원소가 많은 경우에는 규칙성을 찾기 쉽다면 $A=\{4, 5, \cdots, 9\}$와 같이 쓸 수도 있다.

예제 5 3보다 크고 10보다 작은 자연수의 집합 A를 조건제시법으로 표현하면 $A=\{x\,|\,3<x<10$인 자연수$\}$와 같이 쓸 수 있다.

참고 우리가 어떤 사람을 설명할 때 이름을 명확히 말해주면 좋겠지만 때로는 이름을 모르고 '강의실 뒤쪽에 빨간 점퍼를 입고 청바지 입은 사람' 하는 식으로 묘사를 하는 경우가 있다. 집합을 표시할 때도 원소의 조건은 알지만 정확히 원소를 표현하지 못하는 경우에는 조건제시법은 아주 유용한 표시방법이다. $f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$의 해의 집합은 $A=\{3, -1\}$이지만 해를 구하지 못하는 경우에도 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$으로 쓸 수 있다.

집합의 크기

집합은 원소의 개수에 따라 유한집합, 무한집합으로 나눌 수 있다.

유한집합 : 원소의 개수가 유한개인 집합. 특히 원소를 하나도 갖지 않은 유한집합을 공집합이라 하고 ϕ 또는 $\{\ \}$로 표시한다.

무한집합 : 원소의 개수가 무한개인 집합.

예제 6 호남대학교 재학생 중에서 성이 강씨인 학생 전체의 집합은 유한집합이다.

예제 7 $A=\{x\,|\,x$는 2의 배수인 자연수$\}$는 무한집합이다.

1.1 연습문제

1. 다음 모임 A가 집합인지 아닌지를 판단하시오.

(1) A는 2000년도에 출생한 대한민국 국민의 모임이다.

(2) A는 수학을 잘하는 사람의 모임이다.

(3) A는 온라인 게임 중독자의 모임이다.

(4) A는 정사각형의 모임이다.

(5) A는 광주광역시민의 모임이다.

2. 다음문장을 기호로 나타내시오.

(1) a는 집합 A의 원소이다.

(2) a는 집합 A의 원소가 아니다.

3. 조건제시법으로 표현된 다음 집합의 원소를 원소나열법으로 나타내시오.

(1) $A=\{x|x$는 2의 배수인 20 이하의 자연수$\}$

(2) $B=\{x \mid x^2+2x=0\}$

(3) $C=\{x \mid x$는 4의 배수이지만 5의 배수는 아닌 40 미만의 자연수$\}$

(4) $D=\{x \mid x=2a,\ a\in A\}$, 단 A는 (1)의 집합

(5) $E=\{x \mid x$는 미혼인 나의 사촌$\}$

1.2 집합의 연산

부분집합

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소일 때 A를 B의 부분집합(A is a subset of B)이라 하고 $A \subset B$로 표시한다. 즉 $x \in A$인 모든 x에 대해 $x \in B$가 성립하면 A를 B의 부분집합이라 한다.

(2) A가 B의 부분집합인데, B도 A의 부분집합이 된다면 즉 $A \subset B$이고 $B \subset A$라면 A와 B는 같은 집합이 되고 A=B 로 표시한다.

(3) $A \subset B$라면 B의 원소의 개수는 A의 원소의 개수보다 크거나 같다.

예제 1 $A = \{x | x$는 4의 배수인 자연수$\}$,
$B = \{x | x$는 2의 배수인 자연수$\}$라면 $A \subset B$이다. B의 원소 2를 보면 $2 \in B$이지만 $2 \notin A$이므로 B는 A의 부분집합이 아니다.

예제 2 $B = \{a, b, c\}$일 때 B의 부분집합을 모두 구해보아라.
공집합은 모든 집합의 부분집합이고, 또한 B는 항상 B의 부분집합이다. A가 B의 부분집합이라면 $x \in A$인 모든 x에 대해 $x \in B$가 성립해야하므로 A의 원소는 B의 원소로 이루어져 있다. 그러므로 B의 가능한 부분집합은 아래와 같다.

$$2^B = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

집합의 원소에는 제한은 없으나 우리가 문제를 해결하는 과정에서는 특별한 원소를 염두에 두고 그 중에서 해당하는 원소를 표시하는 경우가 대부분이다. 그러므로 이 경우 관심의 대상이 되는 원소를 모아놓은 집합을 전체집합이라 하고 관심 있는 집합을 그 안에서만 고려하는 것이 편

할 것이다.

집합의 연산

A, B는 집합이라고 하자.

A와 B의 **합집합**(A union B) $A \cup B$는 A의 원소 전부와 B의 원소 전부를 원소로 갖는 집합이다.

A와 B의 **교집합**(A intersection B) $A \cap B$는 A와 B에 공통으로 들어있는 원소 전부를 원소로 갖는 집합이다.

A와 B의 **차집합**(A minus B) $A - B$는 A의 원소 중에서 B에는 속하지 않은 원소 전부를 원소로 갖는 집합이다.

전체집합을 U라 할 때 A의 **여집합**(complement of A) A^c는 U의 원소 중에서 A에 속하지 않은 원소로 이루어진 집합이다. 즉 $A^c = U - A$이다.

예제 3 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$는 자연수 전체의 집합, $A = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$는 자연수 중에서 짝수 전체의 집합, $B = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$는 자연수 중에서 3의 배수 전체의 집합이라 하자. 이때

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, \cdots\} = \{x \mid x$는 2의 배수 또는 3의 배수$\}$,

$A \cap B = \{6, 12, 18, \cdots\} = \{x \mid x$는 6의 배수$\}$,

$A - B = \{2, 4, 8, 10, \cdots\} = \{x \mid x$는 6의 배수는 아닌 2의 배수$\}$,

$A^c = \{1, 3, 5, \cdots\} = \{x \mid x$는 홀수$\}$

이다.

집합 사이의 관계나 연산의 결과 등은 벤다이어그램을 사용하여 시각적으로 표시하면 이해하기가 좋다. 벤다이어그램에서는 일반적으로 원이나 닫힌 곡선으로 집합을 표시하며, 곡선 내부에 있는 원소가 그 집합의 원으로 표현된다. 전체집합이 있는 경우에는 전체집합 U를 큰 상자로 표

시하고 집합들을 그 안에 위치하며, 전체집합을 따로 명시하지 않았다면 U는 표시하지 않는다.

집합의 연산으로부터 생기는 포함 관계에 관한 아래 성질은 벤다이어그램으로 쉽게 이해할 수 있다.

집합의 연산과 포함관계

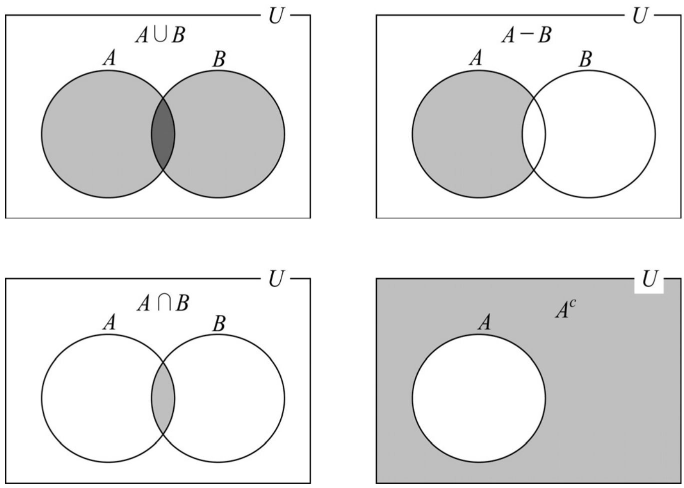
(1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$

(2) $(A^c)^c = A$, $U^c = \phi$, $\phi^c = U$

(3) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

(4) $A \subset B \subset C$ 이면 $A \subset C$

(5) $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$



집합의 연산에 관해 유용한 드모르간의 법칙은 다음과 같다.

드모르간의 법칙

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

증명 (1) $x \in (A \cup B)^c$이면 $x \notin (A \cup B)$이므로 $x \notin A$이고 동시에 $x \notin B$이다. 그러므로 $x \in A^c$이고 동시에 $x \in B^c$이므로 $x \in A^c \cap B^c$이다.

(2) (1)과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. … ◘

예제 4 $U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$는 전체집합, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 6, 9\}$일 때 드모르간의 법칙이 성립함을 확인하여라.

풀이 $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$이고 $A \cap B = \{6\}$이다. $(A \cup B)^c = \{1, 5, 7\}$이고 $A^c \cap B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 5, 7\}$이므로 드모르간의 법칙 (1)이 성립함을 알 수 있다. $(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$이고 $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$이므로 드모르간의 법칙 (2)가 성립함을 알 수 있다. … ◘

유한집합 A의 원소의 개수를 보통 $n(A)$라고 쓴다. 집합의 연산과 원소의 개수 사이에는 다음 관계가 성립한다.

집합의 원소의 개수

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $n(A^c) = n(U) - n(A)$

(3) $A \cap B = \phi$이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

예제 5 1학년 50명이 수강신청을 하고 있다. 일본어와 영어 중 하나 이상의 외국어를 필수적으로 수강해야 하며 둘 다 수강해도 괜찮다. 일본어를 선택한 사람이 25명, 영어를 선택한 사람이 36명이었다.

(1) 일본어와 영어를 모두 수강신청한 학생은 몇 명인가?

(2) 일본어와 영어 중에서 한 가지만 수강신청한 사람은 몇 명인가?

풀이 일본어를 선택한 사람의 집합을 A, 영어를 선택한 사람의 집합을 B라 하면 $n(A)=25$, $n(B)=36$이다. 일본어를 수강신청하거나 영어를 수강신청한 학생의 집합은 $A \cup B$가 되는데, 외국어가 필수이므로 1학년 전원은 일본어나 영어 중 하나 이상을 선택했으므로 $n(A \cup B)=50$이다.

(1) 일본어와 영어를 모두 수강신청한 학생의 집합은 $A \cap B$이고 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$에 의해

$$\begin{aligned} n(A \cup B)=50 &= n(A)+n(B)-n(A \cap B) \\ &= 25+36-n(A \cap B) \end{aligned}$$

이므로 $n(A \cap B)=11$이다.

(2) 외국어를 하나만 수강한 학생의 수는 전체에서 둘 다 수강한 경우를 제외하면 되므로

$$n(A \cup B)-n(A \cap B)=50-11=39$$

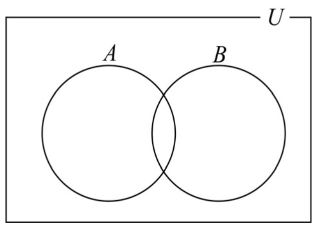
명이다. … ◘

1.2 연습문제

1. 벤다이어그램에 다음 집합을 표시하시오.

(1) A^c (2) $A^c \cap B$

(3) $(A-B) \cup (B-A)$



2. $n(U)=100$, $n(A)=57$, $n(B)=46$, $n(A \cap B)=11$일 때 다음 집합의 원소의 개수를 구하시오.

(1) $n(A^c)$ (2) $n(A \cup B)$

(3) $n(A^c \cap B)$ (4) $n((A-B) \cup (B-A))$

3. (1) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$를 3개의 집합으로 확장하면

$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)$$
$$-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$$

를 얻을 수 있습니다. 벤다이어그램을 통해 확인하시오.

(2) $n(U)=100$, $n(A)=21$, $n(B)=20$, $n(C)=15$, $n(A \cap B)=3$, $n(B \cap C)=1$, $n(C \cap A)=5$, $n(A \cap B \cap C)=0$일 때 벤다이어그램을 그리고 다음 집합의 원소의 개수를 구하시오.

(a) $n(A^c)$ (b) $n(A \cup B)$

(c) $n(A \cup B \cup C)$ (d) $n(A^c \cap B)$

1.3 명제와 진리값

명제(statement)는 참이나 거짓인 문장이다. 명제라고 할 경우에는 동시에 참이거나 거짓인 경우는 배제하며, 명제의 참, 거짓을 진리값이라 하며 참인 경우에는 T, 거짓인 경우에는 F로 표시한다.

예제 1 "2는 짝수이다"는 참인 명제이며, "x는 짝수이다"는 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제라 할 수 없다. 하지만 x의 값이 정해지면 명제이다.

일상에서 말을 할 때 "나는 미적분학을 수강하고 그는 영어를 수강하고 있다"라거나 "그는 도서관에서 공부중이거나 아니면 식당에 있다"와 같이 여러 개의 문장을 이어서 말을 하는 것이 보편적이다. 수학에서도 "2는 짝수이다", "3은 홀수이다" 와 같이 단순한 명제를 여러 개 이어서 "2는 짝수이고 3은 홀수이다"와 같은 표현을 하게 되는데 이를 합성명제라 하며 부정, 논리합, 논리곱 등을 사용하여 만들게 된다.

명제의 합성

p, q를 명제라 하자.

(1) "$\sim p$"는 p의 부정(negation of p)을 표시하며 "p가 아니다" 또는 "not p"라고 읽는다.

(2) "$p \vee q$"는 "p 또는 q이다" 또는 "p or q"라고 하며 p와 q의 논리합(disjunction of p and q)이라 한다.

(3) "$p \wedge q$"는 "p이고 q이다" 또는 "p and q"라고 하며 p와 q의 논리곱(conjunction of p and q)이라 한다.

(4) "$p \oplus q$"는 "p 또는 q이지만 p이고 q는 아니다" 또는 "p xor q"

라고 하며 p와 q의 배타적 논리합(exclusive or of p and q)이라 한다.

합성명제의 진리값은 단순명제의 진리값에 의해 결정되며, 일상적인 경우에 논리적으로 말을 하기 위해 사용되는 경우와 거의 일치한다. 정현이가 안경을 쓰고, 파란 셔츠와 청바지를 입고 있다면 "정현이는 안경을 썼다(p)", "정현이는 파란 셔츠를 입었다(q)", "정현이는 치마를 입었다(r)"에 대해 우리는 각각 참, 참, 거짓이라고 생각할 것이다. 이때 정현이는 안경을 썼기 때문에 그 말을 부정하는 말인 "정현이는 안경을 쓰지 않았다(~p)"는 말은 거짓말이 될 것이다. 정현이는 안경도 썼고 동시에 파란 셔츠도 입었기 때문에 "정현이는 안경을 쓰고 파란 셔츠를 입었다(p and q)"는 말은 올바른 말로 받아들여진다. 하지만 정현이는 치마는 입지 않았어도 파란 셔츠를 입었기 때문에 "정현이는 파란 셔츠를 입었거나 또는 치마를 입었다"고 한다면 참말을 말한 것이 될 것이다.

참고 일상적인 표현과 수학의 논리가 항상 같지만은 않다. 외국 여행을 할 때 비행기에서 승무원들이 식사주문을 받을 때 "고기 또는 생선"을 말할 때는 두 가지 메뉴 중의 하나를 택하라는 의미가 강하다. 승객이 둘 다 먹겠다고 한다면 좀 특별한 상황으로 받아들일 것이다. 실제로 승객 수의 두 배만큼 식사를 준비하지는 않을 것이다. 하지만 식사 후에 커피를 주면서 승무원들이 "프림이나 설탕 드릴까요?" 할 때는 하나만 달라거나 둘 다를 달라고 하는 경우도 당연하게 받아들인다. 프림이나 설탕은 아주 넉넉히 준비되어 있고 둘 다 필요한 사람도 많이 있을 것이다. 이와 같이 "또는"이라는 표현은 일상에서 두 가지 의미로 혼용되어 사용되기도 하는데, 둘 중의 하나만 고르라는 의미에서 "또는"을 사용하는 경우를 수학적 표현으로는 배타적 논리합이라고 하며 "p xor q" 또는 기호로 "$p \oplus q$"로 표시한다. "p xor q"의 진리값은 두 가지 중의 하나만 참이고 하나는 거짓인 경우에만 참이라고 받아들이고, 두 명제 p, q의 진리값이 모두 같은 경우는 거짓으로 처리한다. 일상에서 "or"는 "xor"와 종종 혼용된다.

총수업시간이 15시간인 과목의 학점을 취득하는 데 있어서 “수업 시간의 반 이상을 결석하면 학점은 F를 부여한다”라는 기준이 있다고 하자. 철민이가 9시간을 결석했다면 시험을 아무리 잘 보았어도 학점 규정에 의해 학점이 F가 될 것이며 이 경우 F가 아닌 학점이 부여된다면 규정위반이 된다. 하지만 철민이가 결석을 한 번도 하지 않았다고 해서 학점이 F가 아니라고 보장할 수는 없고 시험 성적에 의해 학점은 F가 될 수도 아닐 수도 있다. 그러므로 “수업 시간의 반 이상을 결석”한다는 조건이 만족되었는데도 “학점이 F가 아닌” 경우에는 학점 규정 위반으로 처리가 잘못된 경우이지만 그 외의 경우에는 규정상 잘못되었다고 할 수 없는 상황이 된다. 이와 같이 두 개의 명제 p와 q에 대해 “p이면 q이다”와 같이 연결하며 만든 문장을 조건문이라 기호로 “$p \rightarrow q$”와 같이 표시한다.

조건명제

두 개의 명제 p와 q에 대해 조건문 “$p \rightarrow q$”는 가정을 만족했는데도 결론이 이루어지지 않은 경우, 즉 p가 참이고 q가 거짓인 경우에만 거짓이 되고 다른 경우에는 모두 참이라고 약속하면 명제가 된다. “$p \rightarrow q$”를 조건명제라 하며 앞의 명제 p를 조건(hypothesis)이라 하며 뒤의 명제 q를 결론(conclusion)이라 한다.

참고 옛날 이야기들을 보면 공주와 결혼하기 위해 찾아온 왕자에게 도저히 할 수 없을 것 같은 일을 시켜서 “그 일을 해내면 결혼하겠다”고 승낙하는 듯이 말하는 경우가 있는데, 이 경우는 그 일을 못해내면 공주는 그 사람과 결혼을 하지 않아도 상관이 없고, 거짓말을 하지 않은 셈이 된다. 승낙이 아니라 사실상의 거절이 되는 것이다. 여러분도 누군가가 여러분을 쫓아다녀서 귀찮은 경우에 어려운 조건을 달아서 승낙하듯이 부드럽게 거절할 수도 있을 것이다. (단, 상대방이 각고의 노력으로 그 일을 이루면 그때는 약속을 안 지키면 여러분이 거짓말쟁이가 되는 수가 있으니 주의하자.)

참고 일상에서 말을 할 때는 “p이면 q”라는 말은 종종 “p이면 q이며 p일 때만 q”라고 혼용되기도 한다. “컴퓨터를 사면 프린터를 드립니다”고 광고를 하는 경우에 컴퓨터를 안 샀는데 프린터를 주어도 거짓광고를 했다고 하는 사람은 없겠지만, 말하는 사람이나 듣는 사람 모두 컴퓨터를 사는 경우에만 프린터를 준다고 받아들일 것이다.

주어진 여러 명제를 부정, 논리합, 논리곱, 조건문 등을 사용하며 다양하게 연결하여 합성명제를 구성할 수 있다. 합성명제의 진리값은 단순한 명제들의 모든 가능한 경우에 대하여 진리표를 만들어 정해진 순서대로 계산하며, 괄호로 구분되지 않고 섞여 있는 경우에는 ~, $\vee$과 $\wedge$, $\rightarrow$의 순서로 적용시켜나가면서 진리값을 구하면 된다.

진리표를 그릴 때는 단순명제의 모든 가능한 경우를 표의 왼쪽에 먼저 표시한다.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F	T

명제의 동치

여러 개의 단순명제들로 연결되어 있는 두 개의 합성명제가 단순명제들의 모든 가능한 경우에 대해 진리값이 같으면 두 명제를 동치(equivalent)라 하고 기호로 $\equiv$로 표시한다.

예제 2 p, q가 명제일 때 합성명제 $p \vee q$와 $p \wedge q$의 부정명제가 다음 명제와 동치임을 보이시오.

(1) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

(2) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

풀이 진리표를 그려 비교하면 동치임을 알 수 있다.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T	F	T	T

… ◘

논리합과 논리곱의 부정은 일상에서 쓰이는 경우와 일치한다. 학과의 대표가 될 수 있는 기준이 '품행이 방정하고 직전학기 학점이 3.0 이상인 학생'이라 하자. 태희가 대표가 될 자격이 있는지를 판단하는데, '품행이 방정하지 못하'거나 '학점이 3.0 미만'이라면 태희는 자격을 만족시키지 못한 셈이 된다. 물론 '품행이 방정하다'는 것은 엄밀한 의미의 명제라고 할 수 없겠지만 사회적 통념에서 받아들인다면 이는 $\sim(p \wedge q)$와 $(\sim p) \vee (\sim q)$가 동치임을 우리가 자연스럽게 사용하고 있다고 볼 수 있다.

예제 3 p, q, r이 명제라 할 때 $p \rightarrow q$, $\sim p \vee q$, $\sim q \rightarrow \sim p$의 진리값을 구하시오.

풀이

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

… ◘

예제 3에서 보면 $p \rightarrow q$와 $\sim p \vee q$의 두 명제가 명제 p, q의 모든 가능한 경우에 대해 진리값이 같다. 그러므로 $p \rightarrow q$와 $\sim p \vee q$는 동치인 명제이고 $p \rightarrow q$의 부정명제를 표현할 때 동치인 명제 $\sim p \vee q$의 부정인

$\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$을 생각해도 좋다.

예제 4 "스타벅스에 가면 맛있는 커피가 있다"고 말했을 때 "아니야, 그건 그렇지 않아"라고 부정을 하는 친구가 있다면 그 친구가 말한 의미는 무엇일지 생각해보자. 조건은 "스타벅스에 간다(p)"이고 결론은 "맛있는 커피가 있다(q)"이므로 조건명제 $p \rightarrow q$의 부정은 "$p \wedge \sim q$" 즉 "스타벅스에 가도 맛있는 커피가 없다"이다.

또한 위의 예에서 보면 $p \rightarrow q$와 $\sim q \rightarrow \sim p$의 두 명제는 명제 p, q의 모든 가능한 경우에 대해 진리값이 같은 걸 보게 되는데, 이는 우리가 일상적으로 말할 때도 흔히 사용하는 경우이다. "수업 시간의 반 이상을 결석하면 학점은 F를 부여한다"는 규정을 다시 설명한다면 "(F가 아닌) 학점을 얻기 위해서는 결석시간이 수업시간의 반 미만이어야 한다"라고 할 수 있을 것이다.

대우명제, 역명제, 이명제

조건명제 $p \rightarrow q$에 대해 $q \rightarrow p$를 역명제, $\sim q \rightarrow \sim p$를 대우명제라 하고, 대우명제의 역명제인 $\sim p \rightarrow \sim q$를 원래 조건명제인 $p \rightarrow q$의 이명제라 한다. 원래의 조건명제와 그 대우명제의 진리값은 항상 일치하지만 즉 동치이지만, 역명제와 이명제는 원래의 조건명제와 진리값이 항상 일치하지는 않는다.

p	q	~p	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

쌍방조건명제 "$p \leftrightarrow q$"는 "$p \rightarrow q$이고 동시에 $q \rightarrow p$이다" 즉 "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$"를 표현하는 명제이다. 진리표에서 보듯이 $p \leftrightarrow q$는 p와 q가 같은 진리값을 가지면 참이 되고, p와 q의 진리값이 다르면 거짓이 된다.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

충분조건, 필요조건

조건명제 $p \rightarrow q$가 참인 경우에 p를 q의 충분조건(sufficient condition), 또 q를 p의 필요조건(necessary condition)이라 한다. 쌍방조건 명제 $p \leftrightarrow q$가 참인 경우에 p를 q의 필요충분조건이라 하고 q도 역시 p의 필요충분조건이라 한다.

충분조건과 필요조건에 대해 설명을 해 보자. p가 q의 충분조건이란 말은 p가 성립하면 q가 성립할 수 있는 충분한 자격이 된다는 의미이다. "8시간 근무를 하면 일당을 준다"고 한 경우에 "8시간 근무를 했다(p)"면 "일당을 받을(q)" 자격이 충분한 셈이다. 한편 "일당을 받지 못했다(~q)"면 이는 "8시간 근무를 하지 않았다(~p)"는 것을 시사하므로 "일당을 받았다(q)"는 것이 "8시간 근무를 하였다(p)"는 것을 확인할 때 필요한 사항이라 할 수 있다.

예제 5 명제 p, q, r에 대해 합성명제

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r,\ (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q),\ (q \vee p) \rightarrow r$$

의 진리표를 구하시오.

풀이

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$q \vee p$	$(q \vee p) \to r$	$r \to q$	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

⋯

1.3 연습문제

1. 다음 합성명제의 진리표를 구하시오.

(1) $p \leftrightarrow q$　　(2) $p \oplus (p \vee q)$

(3) $(p \rightarrow q) \oplus r$　　(4) $(p \vee q) \oplus (q \rightarrow p)$

2. 진리표를 그려 다음 두 명제가 동치인지 아닌지를 확인하시오.

(1) $(p \vee q) \rightarrow r$와 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

(2) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$와 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(3) $p \rightarrow (q \vee r)$와 $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$

3. 다음 표현들은 일상적인 표현이므로 엄밀한 의미의 명제는 아닙니다. 하지만 '날씨가 좋다' 등의 일상 용어도 자연스럽게 받아 들여서 느슨한 의미에서 명제라고 보고, 아래 문장들을 이루는 단순명제를 찾아서 문장을 합성명제로 보고, 문장을 부정해서 표현하시오.

(1) 내일 날씨가 좋고 모두 오면 소풍가자.

(2) 너는 방을 청소하고, 나는 욕실 청소를 담당할 거야.

(3) 네가 오건 말건 난 안 가!